

Seria C (Termin: 11.04.2021)**Zadanie 1.**

Ile jest takich liczb dwucyfrowych, których suma cyfr wynosi 9 oraz spełniających następującą własność: "liczba powstała po przestawieniu jej cyfr jest mniejsza nie więcej niż o 9 od połowy szukanej liczby"?

Zadanie 2.

Czy istnieje wypukły czworobok, którego przekątne dzielą go na cztery trójkąty o polach 1, 2, 3, 4? Jeśli taki czworobok istnieje, to go szczegółowo opisać, jeśli nie istnieje, to uzasadnić jego nieistnienie.

Zadanie 3.

Kwadrat o boku długości n rozcięto na pewną liczbę mniejszych kwadratów, których boki mają długości naturalne, ale niekoniecznie wszystkie takie same. Udowodnić, że suma długości boków otrzymanych kwadratów jest parzysta dla n parzystych, a nieparzysta dla n nieparzystych. Uwaga: Sumy długości boków nie należy interpretować jako sumy obwodów — przykładowo po rozcięciu kwadratu 3×3 na jeden kwadrat 2×2 i pięć kwadratów 1×1 mamy sumę długości boków otrzymanych kwadratów równą $2+1+1+1+1+1=7$.

Zadanie 4.

Liczbą praktyczną nazywamy taką liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$, że każda liczba naturalna mniejsza od n da się przedstawić w postaci sumy **różnych dodatnich dzielników** liczby n (przez sumę rozumiemy także pojedynczą liczbę). Dla przykładu liczba 8 jest praktyczna, ponieważ:

$$1 = 1; 2 = 2; 3 = 1 + 2; 4 = 4; 5 = 1 + 4; 6 = 2 + 4; 7 = 1 + 2 + 4.$$

- Znajdź najmniejszą liczbę parzystą, która nie jest praktyczna i uzasadnij odpowiedź.
- Udowodnij, że jeśli n jest liczbą praktyczną, to $2n$ także jest liczbą praktyczną.
- Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ liczba 2^n jest praktyczna.

Zadanie 5.

W zbiorze liczb całkowitych nieujemnych rozwiąż równanie

$$x^3 + y^3 + 8 = 6xy.$$